

CHOQUE ELÁSTICO DE DISCOS CON SPIN

SIMULACIÓN ANIMADA

ELASTIC COLLISION OF DISKS WITH SPIN

ANIMATED SIMULATION

E. Farías de la Torre*, M. Furer

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba – Ciudad Universitaria – Córdoba – Argentina.

e-mail: fariasdelatorre@gmail.com

Se desarrolla un software de simulación animada destinado al análisis del comportamiento de las variables físicas: velocidad relativa, momento lineal y angular; fuerza y momento interactivo en un choque elástico de dos discos los cuales se hallan animados, inicialmente, de momento angular intrínseco o spin. Se asume un modelo simple y justificado por la experiencia, según el cual se ejerce una fuerza interactiva en la dirección radial proporcional a la deformación en la banda elástica y, una fuerza tangencial proporcional a la primera a través del coeficiente de fricción estático, μ_s . El presente trabajo concreta un aporte sustancial al análisis de la dependencia temporal de las variables físicas de interés durante la interacción.

Palabras Claves: Choque elástico, simulación animada, momento lineal, momento angular intrínseco.

Is developed animated simulation software designed to analyze the behavior of the physical variables: relative velocity, and angular momentum, force and interactive moment in an elastic collision of two disks which are animated, initially, with intrinsic angular momentum or spin. A simple model is assumed and justified by experience, whereby a force is applied in the radial direction proportional to strain in the elastic band, and, a tangential force proportional to the first one through the static coefficient of friction, μ_s . This particular work contributed substantially to the analysis of the time dependence of the physical variables of interest during the interaction.

Keywords: elastic collision, animated simulation, linear momentum, intrinsic angular momentum.

I. INTRODUCCIÓN

Los programas de software referidos a la física interactiva realizan un aporte significativo a la enseñanza de la física. Se puede decir que, por medio de ellos el estudiante profundiza la comprensión de las leyes físicas y sus fórmulas básicas al observar su funcionamiento a través de experiencias concretas propuestas por la actividad.

Este tipo de actividad, por sus características lúdicas, es motivante para el alumno y le induce a desarrollar un aprendizaje mediante la investigación y el descubrimiento y, si bien no aporta todos los elementos de una experiencia física concreta, constituye un auxiliar importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Actualmente y, referido al tema de este trabajo, se dispone software interactivo ⁽¹⁾ en el mercado el cual permite analizar el choque percusivo de discos para distintos tipos de interacción, caracterizadas sólo por su

coeficiente de restitución ⁽²⁾. Nuestro Trabajo, en ese sentido, completa dicho análisis incorporando un mecanismo interactivo concreto y familiar para el alumno, y en el cual se realiza el estudio de dependencia temporal de las variables físicas durante el intervalo de interacción como así también el efecto de los parámetros intervinientes tales como la velocidad relativa y la constante elástica.

Los principales aportes, desde el punto de vista de la enseñanza al tema tratado pueden resumirse en los siguientes puntos:

Propone la realización de experiencias simuladas donde intervienen placas rígidas de geometría simple, como es el caso de los discos y, a partir de lo cual el alumno adquiere un primer dominio de un tema mas complejo.

Un segundo aspecto es referido al sistema elástico que se adopta para la interacción teniendo en cuenta que los alumnos tienen familiaridad con este tipo de

mecanismo y adquirido en asignaturas previas a la mecánica.

Un tercer punto se refiere a la utilización de las leyes de la mecánica de los rígidos tanto referidas al centro de masa como a la rotación respecto del mismo. Nuevamente, reiteramos la idea primaria del trabajo y es que se busca introducir al alumno a la dinámica de los rígidos a partir de las experiencias más sencillas.

Finalmente, cabe mencionar que el presente Trabajo complementa un trabajo experimental hecho con objetivos similares. Los resultados de la simulación y con condiciones adecuadas a las de una experiencia concreta, permitieron contrastar los datos obtenidos en esta última ⁽³⁾.

CONCEPTOS GENERALES SOBRE CHOQUE. CHOQUE ELÁSTICO Y CHOQUE PERCUSIVO.

Para el análisis del choque percusivo de dos discos es conveniente definir dos ejes ortogonales y centrados en el punto de contacto: el eje de choque o eje ξ determinado por los centros de los discos y contiene al punto de contacto y, el eje transversal o eje η , normal al anterior en ese punto y coincidente con la tangente común en ese punto ⁽²⁾.

En la figura 1 se muestra el esquema de choque entre discos para el caso más general. Los discos se designan como H y M y sus velocidades iniciales o previas al choque como V_H y V_M .

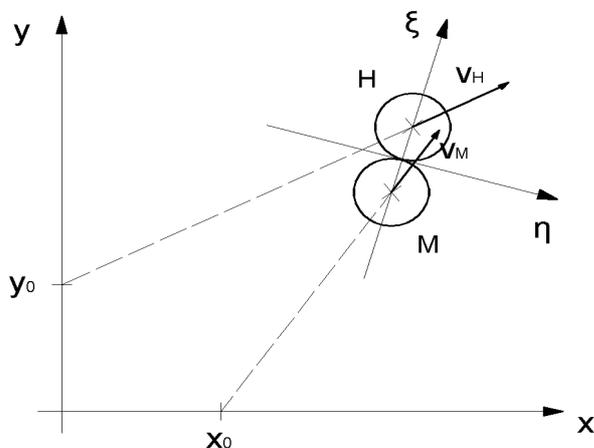


Figura 1: Choque oblicuo entre discos (caso más general). ξ y η son, respectivamente, los ejes de choque y transversal

La situación más general del choque de discos es, en relación a sus condiciones iniciales, cuando la dirección de las velocidades es arbitraria respecto del sistema de coordenadas (ξ, η) ; y, respecto de la interacción cuando la misma determina la transferencia de impulso lineal e impulso angular. La primera, de estas, ocurre cuando la fuerza ejercida es radial y, en este caso se modifica sólo el momento lineal en la dirección ξ . La segunda sucede si la interacción, adicionalmente, aplica a los discos una fuerza

tangencial la cual, además de afectar al momento lineal en la dirección η imprime a ambos discos un impulso angular modificando sus momentos angulares iniciales.

Cuando la interacción es de duración finita es necesario considerar la sucesión de instantes de tiempo y el cambio de posición de los ejes ξ y η . Este análisis resultaría complicado y, en su lugar consideramos conveniente realizar una aproximación consistente en que, el intervalo de interacción y las velocidades tangenciales previas al choque satisfacen la relación,

$$\frac{(V_{H\eta} - V_{M\eta}) \cdot \Delta t}{2(R_H + R_M)} \ll 2\pi \quad (1)$$

la cual significa una rotación pequeña del sistema (ξ, η) durante la interacción. En esta expresión, $V_{H\eta}$ y $V_{M\eta}$ representan las velocidades tangenciales antes del choque; R_H y R_M los respectivos radios y Δt el intervalo de interacción. El factor 2 en el denominador se corresponde con la medición del ángulo respecto del instante tE (figura 2). La aplicación de esta fórmula da por resultado, por ejemplo, para $V_r = 1$ cm/s, un ángulo de giro de 0.18° .

En el presente Trabajo se abordó la simulación de una interacción totalmente elástica entre discos de igual radio e igual masa con la aplicación de una fuerza tangencial lo cual determina no sólo el intercambio de momento lineal en la dirección ξ sino también en la dirección η . Por otra parte, el torque que aplica la fuerza tangencial modifica el momento angular intrínseco de ambos discos.

Las ecuaciones básicas en la dirección ξ , se deducen a partir de la fuerza interactiva que se ejercen mutuamente los discos en la dirección considerada. Consideramos que durante la interacción actúa una fuerza de tipo elástica para la cual se conserva el momento lineal y la energía traslacional. Este par de ecuaciones determina la inversión de la velocidad relativa al cabo de finalizada la interacción; todo esto en un acuerdo con el caso unidimensional. La transición de la velocidad relativa sigue una función cosinusoidal, mientras que, la fuerza interactiva se calcula a partir de la derivada de la velocidad relativa, obteniéndose, por tanto, una función senoidal para esta magnitud.

Distinguimos, por consiguiente, tres intervalos de tiempo si suponemos que la interacción ocurre entre los instantes t_1 y t_2 :

$t \leq t_1$: desplazamiento libre de los discos, sin fuerzas ni torques actuantes.

$t_1 < t < t_2$: intervalo de interacción con aplicación de fuerzas y pares entre discos.

$t \geq t_2$: desplazamiento libre de discos

Las ecuaciones básicas, en la dirección ξ , se deducen en forma inmediata y son, para la velocidad relativa y las velocidades absolutas de los discos H y M,

las indicadas por las ecuaciones (3)-(5). El subíndice indica el disco considerado, la dirección en que se analiza y si es el valor inicial mediante el "0".

La expresión para la fuerza interactiva (ec.2) es válida en el intervalo $t_1 < t < t_2$, mientras que, para los restantes grupos de ecuaciones (3)-(11) el primer renglón se refiere al intervalo $t \leq t_1$; el siguiente a $t_1 < t < t_2$ y finalmente para $t \geq t_2$.

Fuerza interactiva

$$f_{\xi} = mv_r \omega \text{sen} \omega(t - t_1) \quad (2)$$

Velocidad relativa

$$V_{H\xi} - V_{M\xi} = V_{H\xi 0} - V_{M\xi 0} \quad (3)$$

$$V_{H\xi} - V_{M\xi} = -V_r \cos \omega(t - t_1) \quad (4)$$

$$V_{H\xi} - V_{M\xi} = V_{M\xi 0} - V_{H\xi 0} \quad (5)$$

Velocidad absoluta de H

$$V_{H\xi} = V_{H\xi 0} \quad (6)$$

$$V_{H\xi} = \frac{V_{M\xi 0} + V_{H\xi 0}}{2} + \frac{V_r}{2} \cos \omega(t - t_1) \quad (7)$$

$$V_{H\xi} = V_{M\xi 0} \quad (8)$$

Velocidad absoluta de M

$$V_{M\xi} = V_{M\xi 0} \quad (9)$$

$$V_{M\xi} = \frac{V_{M\xi 0} + V_{H\xi 0}}{2} + \frac{V_r}{2} \cos \omega(t - t_1) \quad (10)$$

$$V_{M\xi} = V_{H\xi 0} \quad (11)$$

El intervalo de interacción está definido por los instantes t_1 y t_2 , siendo $t_1 < t_2$ y $t_2 - t_1 = \pi/\omega$. Por otra parte, $\omega = (k/\mu)^{1/2}$ siendo k , la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la deformación del elemento interactivo elástico y, μ , la masa reducida (para nuestro caso, de masas iguales, $\mu = m/2$). Finalmente, $V_{M\xi 0}$ y $V_{H\xi 0}$ son velocidades iniciales de los discos y V_r representa el módulo de la velocidad relativa.

El elemento interactivo se idealiza como una banda elástica periférica que rodea al disco y que, durante la interacción determina la aplicación de las fuerzas radiales en los centros de masa de ambos discos. Adicionalmente, las superficies en contacto de las respectivas bandas periféricas generan la aplicación de fuerzas tangenciales debido al roce entre ellas, el cual es tal que no permite el deslizamiento de una respecto de otra sino que cumple la función de transmitir esfuerzo tangencial. Finalmente, es importante mencionar que

un bajo valor de k determina la realizabilidad de una experiencia concreta por cuanto permitiría visualizar el intervalo de interacción con suficiente cantidad de puntos para detectar las posiciones de los centros de masa de los discos y, con ello la velocidad relativa y la fuerza interactiva. Por el contrario, un valor elevado de esta constante nos aproximaría al límite de choque percusivo, para el cual el intervalo de interacción se anula; la inversión de la velocidad relativa es instantánea y, la fuerza interactiva adquiere la forma de una delta de Dirac. En la figura 2 se resumen estas consideraciones.

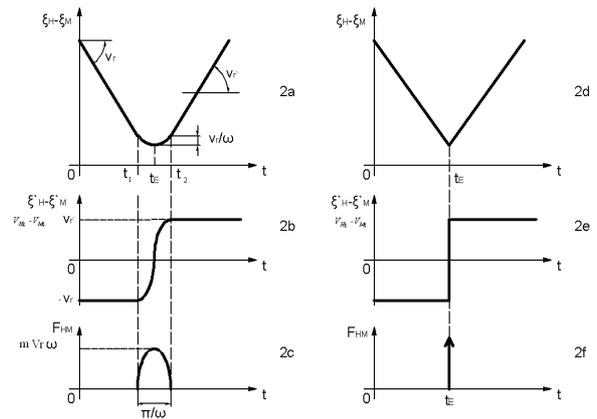


Figura 2: Comparación entre el choque elástico y el choque percusivo. F_{HM} es la fuerza aplicada a H por M.

DISEÑO DE LA EXPERIENCIA - GEOMETRÍA DEL CHOQUE

Un esquema para las condiciones iniciales de lanzamiento de los discos se muestra en la figura 3. En ella designamos los discos como H y M, las coordenadas iniciales de los centros son: $(0, Y_{OH})$ y $(X_{OM}, 0)$ respectivamente. Las trayectorias predeterminadas son las definidas por los ángulos α y β o los segmentos \overline{HE} y \overline{ME}

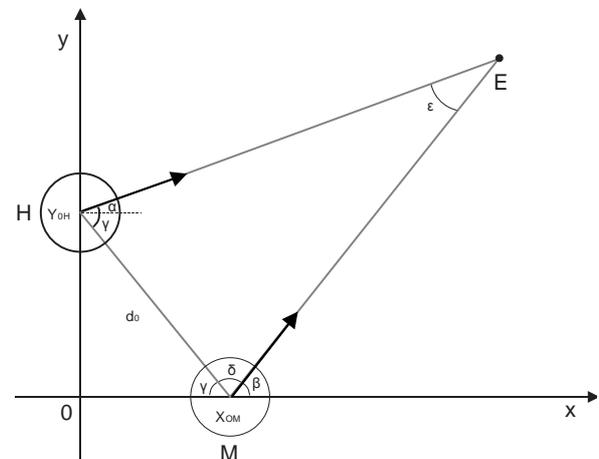


Figura 3: Geometría del choque. Las condiciones iniciales

están determinadas por X_{OM} , Y_{OH} , α y β

A partir de las condiciones iniciales puede determinarse el resto de la geometría de la figura.

$$\alpha = \arctg\left(\frac{Y_{0H}}{X_{0M}}\right) \quad (12)$$

$$\delta = 180 - \beta - \gamma \quad (13)$$

$$\varepsilon = \beta - \alpha \quad (14)$$

Además,

$$\overline{HE} = d_0 \left(\frac{\text{sen}\delta}{\text{sen}\varepsilon} \right) \quad (15)$$

$$\overline{ME} = d_0 \left(\frac{\text{sen}(\alpha + \gamma)}{\text{sen}\varepsilon} \right) \quad (16)$$

$$d_0 = \sqrt{Y_{0H}^2 + X_{0M}^2} \quad (17)$$

El planteo del encuentro de los discos podría asumirse así: Se lanza un disco H desde $(0, Y_{OH})$ y con una velocidad v_H . Simultáneamente se lanza in disco M desde $(X_{OM}, 0)$ ¿Cuál debe ser la velocidad v_M del segundo disco para que colisionen?

La resolución la planteamos suponiendo un instante de colisión, t_C , con la condición que $v_H t_C \leq \overline{HE}$. A partir de esta especificación determinamos la condición para que en $t = t_C$ la distancia entre discos sea $2r$. Las soluciones para el centro del segundo disco resultan:

$$\overline{C_M E} = \overline{C_H E} \cos \varepsilon \pm \sqrt{4r^2 - \overline{C_H E}^2 \text{sen}^2 \varepsilon} \quad (1)$$

La cual puede interpretarse, gráficamente, como se muestra en la figura 4:

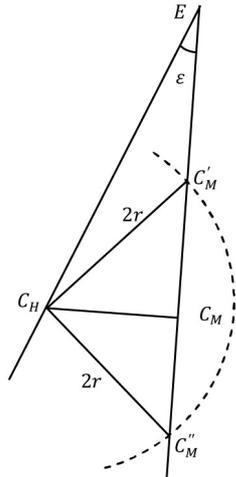


Figura 4: Interpretación gráfica de las soluciones para el encuentro de los discos.

Donde, el primer sumando, está representado por la proyección de $\overline{C_H E}$ en la dirección de \overline{HE} , y el segundo corresponde a los segmentos $\overline{C_M' E}$ y $\overline{C_M'' E}$.

De la disposición general, para el choque de los discos, indicada en la figura 1, se adoptó como diseño de la experiencia simulada la de un choque a 90° . Este diseño tiene la ventaja de la coincidencia de los sistemas (η, ξ) y (x, y) . El disco M desarrolla una trayectoria paralela al eje x, o eje de choque, mientras que el disco H se aproxima al punto de encuentro en la dirección del eje y, o eje de choque con una velocidad adecuada para efectivizar el encuentro. Finalmente, el disco M impacta al H determinando, la inversión de la velocidad relativa en la dirección del eje ξ con el intercambio de las velocidades absolutas en esa dirección para el caso de igualdad de masas.

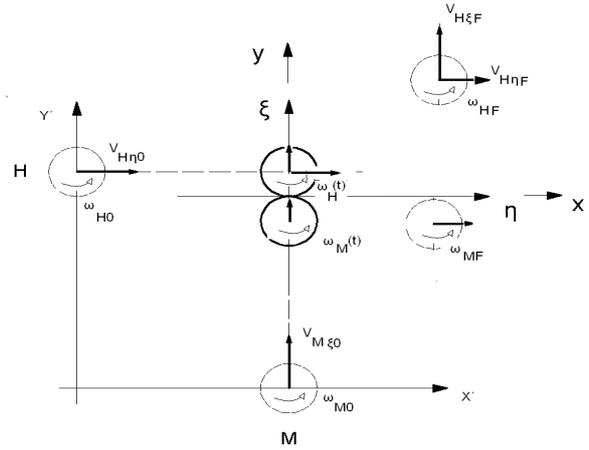


Figura 5: Tres instancias de choque de los discos con spin: a) previo a la colisión (contorno discontinuo); b) Durante la colisión (contorno lleno) y, c) después de la colisión (contorno discontinuo). Las condiciones iniciales de los discos se indican con subíndice "0".

ECUACIONES PARA LA DIRECCIÓN TRANSVERSAL

Para el análisis del movimiento en la dirección transversal es necesario, en primer término, considerar que la fuerza tangencial es proporcional a la fuerza en la dirección normal a través del coeficiente de fricción estático, μ_s . Por ello, su dependencia temporal asume la forma de la ec. 2, afectada por el coeficiente mencionado. En tal sentido, para la resolución del movimiento es necesario trasladar las respectivas fuerzas tangenciales a los centros de masa de los discos H y M incorporando el torque correspondiente a fin de lograr la equivalencia mecánica (Figura 3). Un problema previo a resolver es determinar el sentido de la fuerza tangencial entre los discos; para ello se debe tener en cuenta que tal fuerza es determinada por la velocidad relativa de los puntos periféricos de ambos discos. En efecto, el más veloz empujará al menos veloz y con ello se define el sentido de la fuerza tangencial.

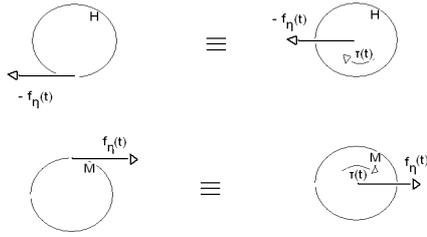


Figura 6: Equivalente mecánico para la fuerza tangencial aplicada, $\tau(t) = f_{\eta} \cdot R$ representa el torque

Comenzando diremos que, la ecuación para la fuerza aplicada en la dirección η , al disco H por el disco M y en módulo resulta:

$$f_{\eta} = m\mu_s v_r \omega \cdot \text{sen} \omega(t - t_1) \quad (19)$$

Integrando, para el disco H:

$$\eta''_{HM} = -\mu_s V_r \omega \cdot \text{sen} \omega(t - t_1) \quad (20)$$

resultando, para la velocidad relativa, en esa dirección y para el intervalo de la transición:

$$V_{HM\eta}(t) = V_{H\eta}(0) + \mu_s V_r [\cos \omega(t - t_1) - 1] \quad (21)$$

Con los valores límites esperados:

$$V_{HM\eta}(t_1) = V_{H\eta}(0) \quad (22)$$

$$V_{HM\eta}(t_2) = V_{H\eta}(0) - 2\mu_s V_r \quad (23)$$

Para las velocidades absolutas:

$$V_{H\eta}(t) = V_{H\eta}(0) + \frac{1}{2} \mu_s V_r [\cos \omega(t - t_1) - 1] \quad (24)$$

$$V_{M\eta}(t) = -\frac{1}{2} \mu_s V_r [\cos \omega(t - t_1) - 1] \quad (25)$$

Con los valores límites:

$$V_{H\eta}(t_1) = V_{H\eta}(0) \quad (26)$$

$$V_{H\eta}(t_2) = V_{H\eta}(0) - \mu_s V_r \quad (27)$$

$$V_{M\eta}(t_1) = 0 \quad (28)$$

$$V_{M\eta}(t_2) = \mu_s V_r \quad (29)$$

ECUACIONES PARA LA ROTACIÓN DE LOS DISCOS

El momento angular de cualquiera de los discos y, respecto de un punto del plano de movimiento es el resultante de la suma del momento angular intrínseco o de spin (giro sobre su eje) y el momento de la cantidad de movimiento lineal, p, que se halla aplicado en el centro del disco. Elegimos como centro de momento y por razones de simplicidad en el desarrollo matemático, al punto (0,-R) con lo cual, el momento de p correspondiente al disco M resulta nulo para todo instante, quedando sólo el momento angular intrínseco. Para el disco H la situación es distinta como se puede apreciar en la Figura 5 presentando ambos tipos de momento angular.

En lo que resta del desarrollo no introduciremos notación vectorial habida cuenta que los vectores momento angular y velocidad angular son perpendiculares al plano de movimiento. A partir de la ecuación:

$$\frac{d}{dt} l_{sH,M}(t) = \tau_{sH,M}(t) \quad (30)$$

donde, $\tau_{sH,M}(t)$ representa el torque aplicado por la fuerza tangencial sobre los discos H ó M, se deduce la dependencia temporal de los momentos angulares de spin. Por otra parte, el momento de la cantidad de movimiento lineal p, del disco H durante la interacción se obtiene a partir de una ecuación similar pero con el torque de la fuerza tangencial aplicada en el centro de H (equivalente mecánico).

Las notaciones asumidas son las siguientes:

l_{sH} : momento angular intrínseco del disco H.

l_{sM} : momento angular intrínseco del disco M.

l_{pH} : momento de p correspondiente al disco H.

Con esto las ecuaciones para el momento angular de los discos resulta:

$$l_{sH}(t) = l_{sH}(0) - mR\mu_s V_r [1 - \cos \omega(t - t_1)]$$

(2)

$$l_{sM}(t) = l_{sM}(0) - mR\mu_s V_r [1 - \cos \omega(t - t_1)]$$

(3)

$$l_{pH}(t) = l_{pH}(0) + 2mR\mu_s V_r [1 - \cos \omega(t - t_1)]$$

(4)

donde:

$$l_{sH}(t) = I_0 \omega_H(t) \quad (5)$$

$$l_{sM}(t) = I_0 \omega_M(t) \quad (6)$$

Io: momento de inercia de un disco: $mr^2/2$.

$\omega_{H,M}$: velocidad angular instantánea de los discos H ó M.

Finalmente, usando las fórmulas (14), (15) se obtienen las respectivas velocidades durante la transición:

$$\omega_H(t) = \omega_H(0) - \frac{2}{R} \mu_s V_r [1 - \cos \omega(t - t_1)] \quad (7)$$

$$\omega_M(t) = \omega_M(0) - \frac{2}{R} \mu_s V_r [1 - \cos \omega(t - t_1)] \quad (8)$$

Conservación del momento angular

Las ecuaciones (31)-(33) permiten comprobar la conservación del momento angular del sistema. En efecto, si se suman las tres ecuaciones se verifica que:

$$l_{sH}(t) + l_{sM}(t) + l_{pH}(t) = l_{sH}(0) + l_{sM}(0) + l_{pH}(0) \quad (9)$$

SIMULACIÓN ANIMADA DE LA EXPERIENCIA

La realización de la experiencia simulada se realizó usando Matlab 7.0⁽⁴⁾. El trabajo se concretó sobre el análisis del intervalo de interacción y en él la dependencia con el tiempo de las variables físicas precisadas a fin de que el alumno visualice de que manera éstas cambian desde su valor inicial a su valor final. La animación para el intervalo de interacción elástica se realizó con una velocidad relativa de 1cm/s a fin de visualizar más claramente el efecto sobre el valor máximo de la fuerza (Figura 7).

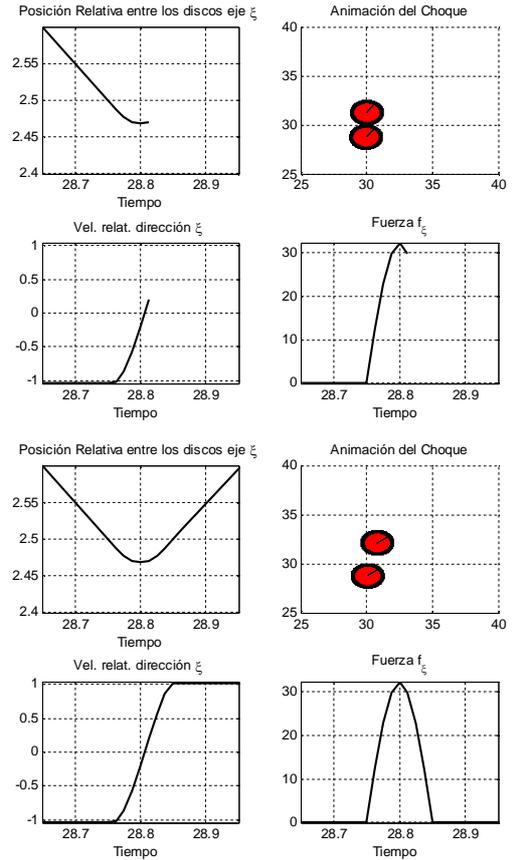


Figura 7: Desarrollo animado durante la interacción con $V_r = 1 \text{ cm/s}$; $m = 100\text{g}$; $V_{H1} = 0.667 \text{ cm/s}$.

La incorporación de las ecuaciones (6)-(11) al software de simulación permite mostrar la dependencia temporal de las velocidades absolutas de ambos discos. Los resultados se incorporan en la figura 8, la cual muestra, en cuatro instantes de tiempo sucesivos el proceso de intercambio de las velocidades absolutas durante la interacción.

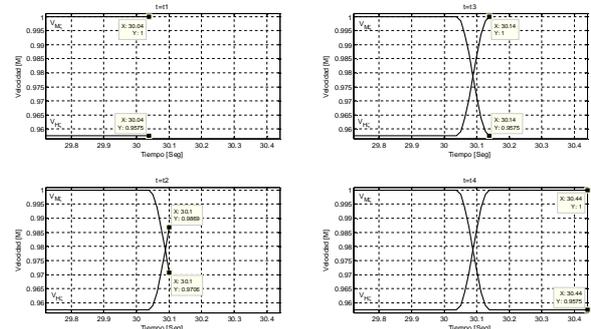


Figura 8: Dependencia temporal de las velocidades absolutas para ambos discos para $V_{M\xi_0} = 1 \text{ m/s}$, $V_{H\xi_0} = 0$ y $V_r = 1 \text{ cm/s}$

En la figura 9, se muestran las curvas animadas correspondientes al movimiento en la dirección de η

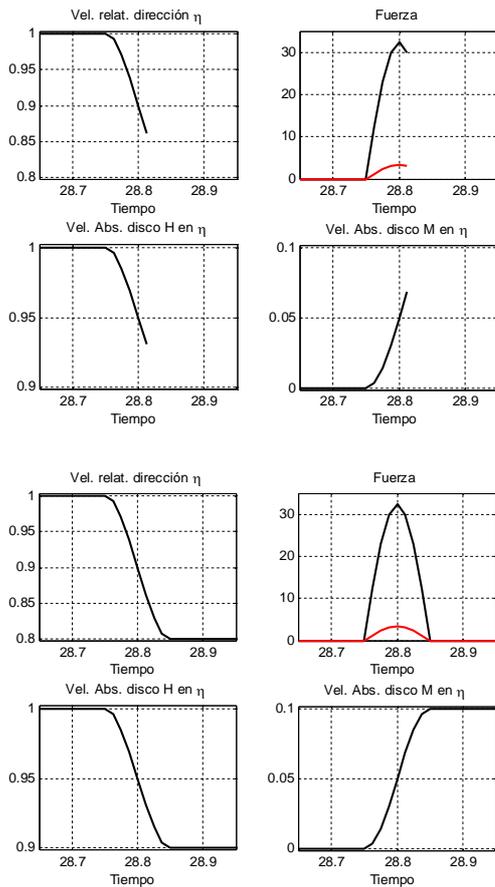


Figura 9: Desarrollo animado durante la interacción para el movimiento según η

CONCLUSIONES

El presente trabajo de simulación animada constituye un complemento eficaz a la enseñanza del tema por cuanto permite incorporar un mecanismo interactivo concreto y familiar al alumno, tal es el caso de la interacción elástica. Se abordó el problema de choque de discos de la manera más completa posible al agregar el intercambio de momento angular y los conceptos de conservación en relación a este tema. Finalmente, otro aspecto a considerar es la visualización de la fuerza y torque interactivo y su papel en el intercambio de momentos lineales y angulares.

Consideramos que la presente simulación concreta un aporte significativo a asignaturas de Física básica y Mecánica.

Referencias

- 1–Pasco Interactive Physics. Design Simulation Technologies. (2008).
- 2–Beer, F. P. y Johnston, E. R. Mecánica Vectorial para ingenieros, (Dinámica) VI Ed. Mc. Graw Hill. (1998)
- 3)- Farías de la Torre, E. M., Tempo M. E., Gonzalez Dondo D., Bergues G.J., Mansilla J.C. and Novillo D. Anales AFA,22, 23-29 (2010).