



EXPERIENCIAS DE DINÁMICA EN 2D

Farías de la Torre, Ernesto M.¹; González Dondo Diego²; Tempo, Matías E.³

¹Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba.

²Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional. ³Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional.

fariasdeltorre@gmail.com

RESUMEN

Se realizan dos experiencias en 2D utilizando un sistema óptico-digital con procesamiento de imágenes para la detección de posiciones. La primera, es la experiencia clásica de tiro oblicuo, la cual es cumplimentada con la determinación de la parábola de seguridad. La segunda, el choque elástico de dos discos, pone en evidencia la utilidad del sistema de medición adoptado al permitir estudiar la dependencia temporal de las variables físicas en el transitorio de la colisión.

Palabras Claves: tiro oblicuo, choque elástico, procesamiento de imágenes, intervalo interactivo.

INTRODUCCION

El amplio desarrollo en el ámbito de la robótica (Bradski, Kaehler, 2005, p.203), del software de captura y procesamiento de imágenes ofrece una importante herramienta para la detección de movimientos en experiencias de dinámica en 2D, ya sea de partículas como así también de placas rígidas. De esta manera es posible completar el análisis teórico, tradicional, con la correspondiente verificación experimental de los resultados encontrados analíticamente.

En el presente trabajo se realiza una aplicación de un sistema de medición basado en la captación de posiciones mediante cámara digital de alta velocidad y posterior procesamiento de imágenes, al estudio de dos tipos de experiencias. Por un lado, se aborda el *tiro oblicuo* como un ejemplo de experiencia en 2D para el caso de una partícula. En este sentido se aporta la posibilidad de variar el valor de la aceleración de caída, con la inclinación del plano de movimiento, y el análisis de la parábola límite. En segundo término se presenta el caso de *movimiento de placas* mediante la experiencia del *choque elástico entre discos*. En ella se realiza, por una parte, el análisis de la conservación del momento lineal y el momento angular para la experiencia global y, en segundo término, nos enfocamos en el estudio de la dependencia con el tiempo, durante la colisión, de la



velocidad relativa y la fuerza de interacción. En esta segunda experiencia se ha buscado efectuar un aporte significativo a la enseñanza del tema en relación a la posibilidad de visualizar el fenómeno durante el transitorio de la colisión.

Finalmente cabe mencionar que, en el mercado del equipamiento didáctico, se dispone de experiencias del tema limitadas a las instancias previas y posteriores del choque (Leybold didactic GMBH, 2007, p.30) y no así al análisis experimental del intervalo de interacción. En ese sentido con el presente trabajo se espera realizar un aporte significativo a la enseñanza del tema en cuestión.

DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO

El equipo consta de una mesa para suspensión por aire de 1mx1m la cual presenta orificios de 1mm de diámetro ubicados según un retículo con un espaciamiento de 2,5cm en ambas direcciones. Con esta disposición y diámetro de orificios se logra una suspensión del orden de 0.2mm para los discos empleados en ambas experiencias. Tiene, asimismo, dos lanzadores contruidos con resortes y guías cilíndricas de acrílico, cada uno de los cuales presenta una escala longitudinal para calibración.

La cámara de alta velocidad utilizada fue una Basler (SC A780) de 54 cuadros por segundo (color) con una velocidad de captura monocromo de hasta 100 cuadros por segundo (variante utilizada en nuestras experiencias) la cual se ubica en el puente que atraviesa la pista, a una altura de 1,3m, suficiente para efectuar el enfoque total de la pista y a fin de capturar las imágenes de la experiencia completa (figura 1a). Para la experiencia de tiro oblicuo se construyó un elemento constituido por dos discos iguales de acrílico con un radio de 30 mm, unidos por un eje de sección cuadrada de 10 mm de lado. La impulsión de este disco compuesto se realiza mediante uno de los lanzadores el cual atraviesa con su eje a media altura al separador a los fines de direccionar el disparo.

Los discos, para la experiencia de choque, han sido contruidos en forma similar, en acrílico, y son de dos tipos: un primer disco, disco H, presenta un par de discos (superior) y otro par (inferior) todos de $R_H=53\text{mm}$ separados por un eje de sección cuadrada de 10 mm de lado. El par interno presenta 180 orificios, equiespaciados, distribuidos en la periferia los que permiten disponer el hilo elástico. Los exteriores sirven para aumentar la inercia e igualar la masa de ambos discos.

Un segundo disco, M, presenta en su estructura un disco superior, uno inferior y uno intermedio de mayor radio, $R_M=63\text{ mm}$, a fin de poder deformar la pared de elásticos del disco H durante el choque.



Ambos sistemas de discos presentan una cobertura blanco mate en la parte superior la cual contrasta con la pista con revestimiento negro mate y esto a fin de mejorar la captura de las imágenes, evitando reflejos indeseados. Asimismo y, a una distancia $b=35\text{mm}$ del centro del disco superior se halla dibujado, en negro mate, un círculo de radio inferior (círculo periférico), el cual permitirá medir el desplazamiento angular del centro de este segundo círculo respecto del primero (figura 1b).

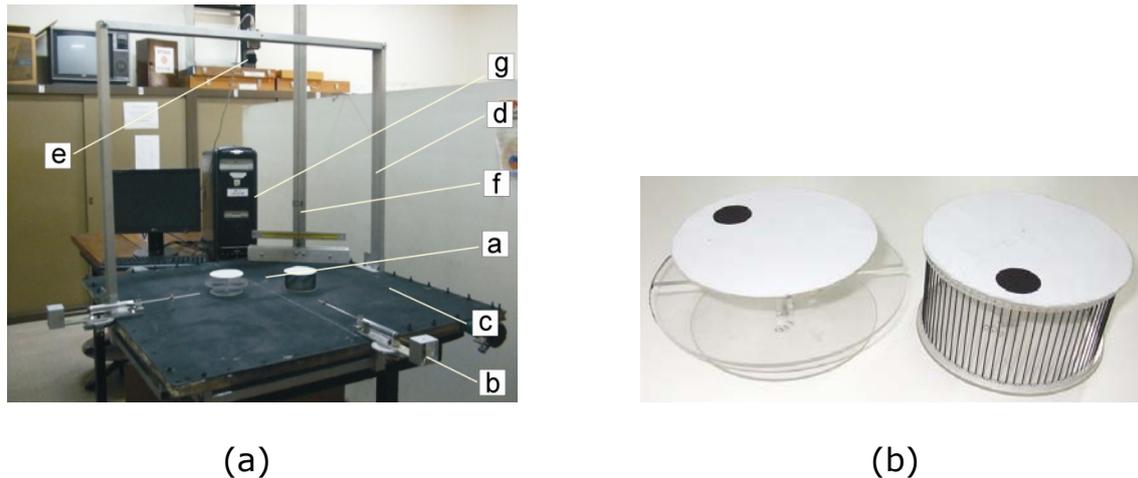


Figura 1: (a) Equipo para experiencias en 2D: a) discos; b) lanzadores c) mesa de suspensión por aire; d) puente para suspensión de la cámara; e) cámara digital de alta velocidad; f) péndulo para nivelación de la mesa; g) PC. (b) Discos utilizados para la experiencia de choque elástico.

EL TIRO OBLICUO

Por tiro oblicuo entendemos, como se sabe, a la trayectoria que describe una masa bajo la acción de la gravedad terrestre cuando es lanzada con una velocidad inicial v_0 y un ángulo α de inclinación respecto de la horizontal.

El diseño de nuestra experiencia consiste en impulsar un disco sobre la mesa de suspensión con aire la cual observa un ángulo β de inclinación respecto del plano horizontal determinando, así, una aceleración efectiva, $g_\beta = g \sin \beta$ (figura 2). Como ya sabemos y, a partir de la II ley de Newton podemos deducir las ecuaciones dependientes del tiempo para la velocidad y la posición suponiendo las condiciones iniciales: $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ conjuntamente con, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ y, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, definiendo a v_0 como el módulo de la velocidad inicial y, α al ángulo de elevación del proyectil.

Subsiguientemente y por eliminación del parámetro temporal se obtiene la trayectoria de grave (Roederer, 2008, p.83):



$$y(x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g_{\beta}}{2 \cdot v_{0x}^2} \cdot x^2 \quad (1)$$

Parábola límite (o de seguridad)

Es la envolvente de las parábolas de tiro oblicuo, $y(x)$, cuando se varía el ángulo α manteniendo constante el módulo de la velocidad inicial, v_0 . Define una zona del plano que es inalcanzable por el proyectil.

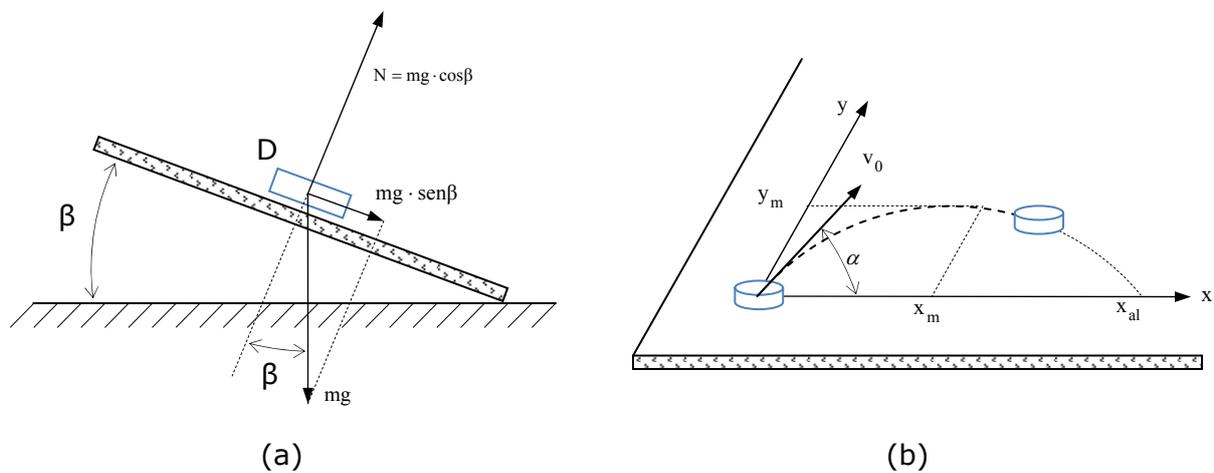


Figura 2: Diseño de la experiencia de tiro oblicuo. a) vista lateral; b) vista de frente; D: disco utilizado como proyectil. (x_m, y_m) : coordenadas del punto de la trayectoria de máxima altura.

La ecuación para la parábola de seguridad resulta:

$$y = \frac{v_0^2}{2 \cdot g_{\beta}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{g_{\beta}}{V_0^2} \cdot x^2 \quad (2)$$

La cual tiene un único punto de contacto con la parábola de tiro de ángulo α de coordenadas:

$$x_c = \frac{v_0^2}{g_{\beta} \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (3)$$

$$y_c = \frac{v_0^2}{2 \cdot g_{\beta}} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (4)$$

REALIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA



I. Ecuaciones horarias.

La realización de la experiencia se efectivizó lanzando el disco con distintos ángulos mediante un disparador como el descrito en párrafos anteriores. Es primordial asegurar un mismo punto de disparo e igual velocidad para los distintos ángulos. Lo primero se hizo demarcando sobre la pista un círculo con el contorno del disco lo cual determina un mismo origen de disparo cuando, para cada ángulo, se retornaba a esa posición. Lo segundo, se logra mediante el cuidado de adoptar la misma deformación del resorte calibrado (ver *calibración*) para los distintos ángulos, α .

La captura de las imágenes se realiza cada 10 ms. En la figura 3 se presenta una sucesión de instantáneas a intervalos de tiempo superiores al indicado y con el fin de lograr una mejor visualización de la captura.

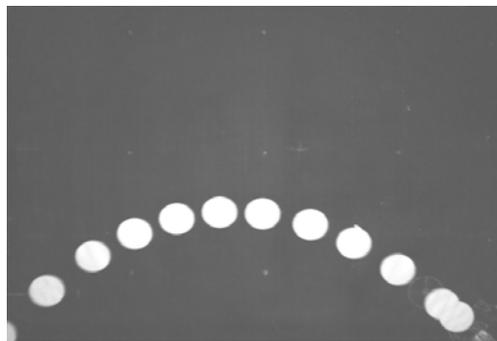


Figura 3: Sucesión de instantáneas para un ángulo de disparo de 45° . La captura real se hace cada 10 ms.

La determinación de las posiciones del centro del disco se realizó mediante un algoritmo de procesamiento de imágenes basado en el seguimiento del contorno inicial y, a partir de éste, la determinación de las coordenadas del centro para todo instante de tiempo.

Por otra parte, la velocidad se encuentra a partir de un algoritmo de derivación basado en la definición de esta magnitud como cociente incremental. Finalmente, para la aceleración se utiliza la recta de regresión lineal de la velocidad. En la figura 4 se muestran los resultados obtenidos para uno de los lanzamientos ($\alpha = 45^\circ$).

La escala vertical de las gráficas de posición se presenta en pixeles (px) con la equivalencia $1\text{px} = 0.1308\text{cm}$. Para el caso de las gráficas de velocidad, se representa en px/s . Finalmente, la escala temporal es en $1 \times 10^{-2} \text{s}$.

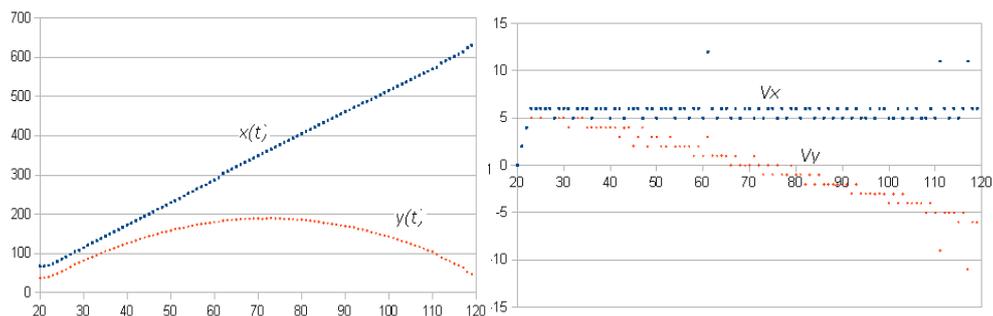


Figura 4: Funciones posición y velocidad para $\alpha=45^\circ$.

Como resultado de los datos provistos por las ecuaciones horarias se obtuvo, para la componente tangencial de la aceleración de la gravedad el valor $g_\beta \approx 150 \text{ cm/seg}^2$ y, para la velocidad inicial, $v_0 \approx 101 \text{ cm/seg}$.

La primera es algo inferior a la esperada, 170 cm/s^2 , obtenida a partir del ángulo medido. Consideramos que esto se debe a la fricción del disco con la mesa.

II. Parábola límite o de seguridad.

A partir de los resultados anteriores y, usando las ec. (4) y (5) se pueden determinar los puntos de contacto de la parábola límite con las correspondientes a distintos ángulos. Los resultados se presentan en la figura 5.

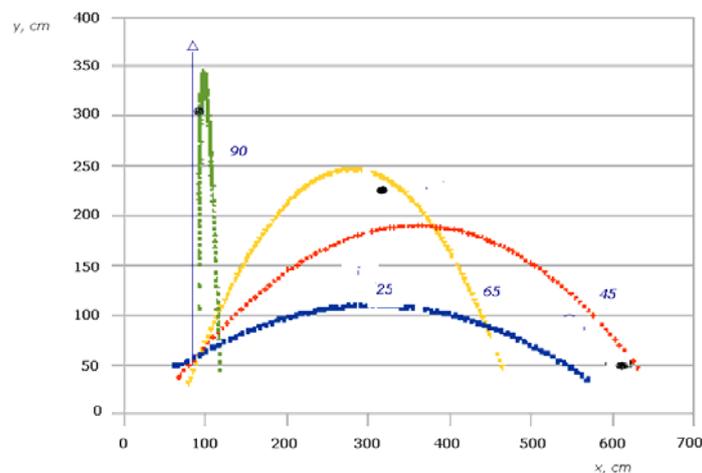


Figura 5: Gráfica conjunta de las distintas parábolas. Se indican tres puntos llenos, correspondientes a la parábola de seguridad.

CHOQUE PERCUSIVO Y CHOQUE ELÁSTICO.

Para el análisis del choque de dos discos es conveniente definir dos ejes de interés especial y que se hallan centrados en el punto de contacto: el eje de choque y el eje transversal. El eje de choque, ξ , está determinado por los centros de los discos y contiene al punto de contacto; el eje transversal, η , es normal al anterior en este punto y es coincidente con la tangente común en el instante de contacto. En todo esto nos referimos al



choque percusivo para el cual la interacción es instantánea (Beer, Johnston, 1998, p.1084).

La situación más general del choque percusivo de discos es, en relación a sus condiciones iniciales, cuando la dirección de las velocidades resulta arbitraria respecto del sistema de coordenadas (ξ, η) ; y, respecto al tipo de interacción, cuando la misma determina la transferencia de impulso lineal e impulso angular. La primera ocurre cuando la fuerza ejercida es radial y, en este caso se modifica sólo el momento lineal en la dirección ξ . La segunda sucede si la interacción, adicionalmente, aplica a los discos una fuerza tangencial la cual afecta, también, al momento lineal en la dirección η y les imprime un impulso angular a ambos discos modificando sus momentos angulares iniciales. En la figura 6 se muestra el caso particular de nuestra experiencia, para la cual los ejes de choque y transversal coinciden, respectivamente, con los ejes (y, x) , lo cual facilita el tratamiento de los datos.

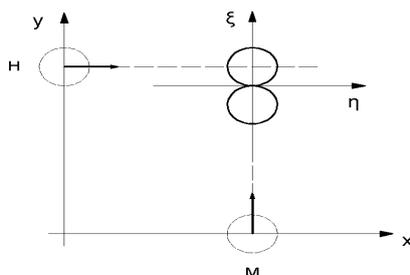


Figura 6: Choque de discos (caso simplificado, para nuestra experiencia)
 ξ y η son, respectivamente, los ejes de choque y transversal.

Por otra parte, en el choque percusivo, la fuerza de interacción se asocia a una función delta de Dirac, es decir, de intensidad infinita y aplicada durante un intervalo de tiempo nulo. Además, su integral en el tiempo da por resultado el impulso transferido de un disco a otro.

Cuando la interacción es de duración finita es necesario considerar la sucesión de instantes de tiempo y el cambio de posición del sistema de los ejes. Este análisis resultaría complicado y, por ello, en su lugar consideramos conveniente realizar una aproximación consistente en que, el intervalo de interacción y las velocidades tangenciales previas al choque satisfacen la relación:

$$\frac{(V_{H\eta} - V_{M\eta}) \cdot \Delta t}{2(R_H + R_M)} \ll 2\pi \quad (5)$$

La cual significa que la rotación del sistema (ξ, η) es pequeña durante la interacción. En esta expresión $V_{H\eta}$, $V_{M\eta}$ representan las velocidades tangenciales antes del choque; R_H , R_M los respectivos radios de los discos



y, Δt el intervalo de interacción. El factor 2 en el denominador se debe a que la rotación se refiere a la posición del sistema en el instante t_E , intermedio de la colisión (figura 7).

Para una interacción arbitraria, el coeficiente de restitución se define como (Beer, Johnston, 1998, p.1084):

$$\frac{\int R(t) dt}{\int P(t) dt} \quad (6)$$

y, mide el grado de restitución del impulso recibido durante la deformación del elemento interactivo. La función $P(t)$ representa la fuerza mutua durante la deformación mientras que, $R(t)$ es la fuerza ejercida en la recuperación.

Alternativamente, en nuestro caso, usaremos una expresión en función de las velocidades relativas antes y después del choque:

$$\frac{V'_{H\xi} - V'_{M\xi}}{V_{M\xi} - V_{H\xi}} \quad (7)$$

donde, las variables no primadas corresponden a instantes anteriores al choque mientras que, las variables primadas se refieren a los instantes posteriores a la colisión.

En el presente trabajo se abordó el estudio de una interacción elástica para la cual su coeficiente de restitución es muy próximo a uno. La amplitud de deformación, la velocidad relativa y la intensidad de la fuerza se muestran en la figura 7, como una síntesis del análisis realizado por los autores. En esta figura se presenta, en ordenadas, la posición relativa de los centros de los discos (a y d), su derivada (b y e) y la fuerza mutua (c y f) para los dos tipos de choque; $\omega = (2k/m)^{1/2}$ siendo k , la constante elástica y, m : la masa del disco H . Finalmente, el intervalo de interacción resulta, $\Delta t = \pi / \omega$; y el valor máximo de la fuerza interactiva, $m V_r \omega$. La situación límite y teórica de constante elástica infinita nos conduce al choque percusivo (figuras 7 d, e y f).

REALIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

La realización de la experiencia supone varios pasos: *diseño, calibración, captura y procesamiento de las imágenes obtenidas.*

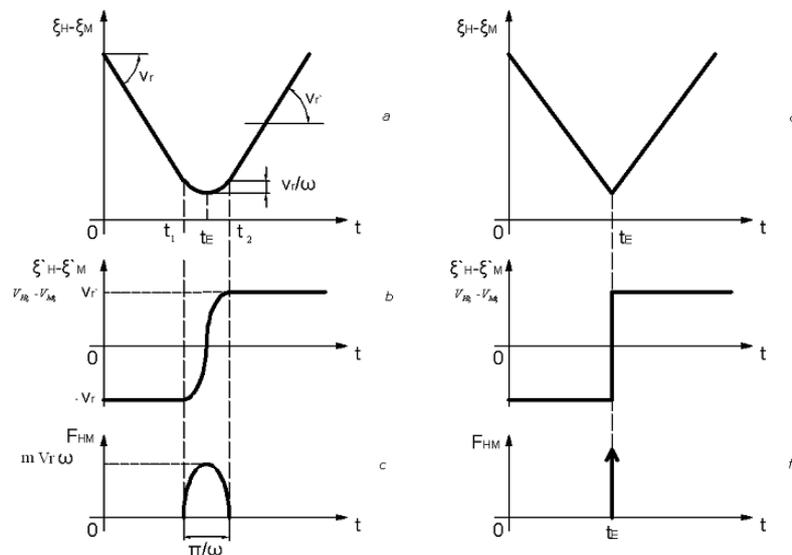


Figura 7: Comparación entre el choque elástico y el choque percusivo. F_{HM} es la fuerza ejercida por M sobre H.

Diseño: En el diseño de la experiencia de choque se debe buscar una forma simple que permita ubicar los ejes ξ y η fácilmente y en relación a los ejes x e y de laboratorio. Un segundo aspecto a considerar es el de asegurar el choque, es decir que, las velocidades de los discos y las distancias a recorrer así lo permitan. Se optó por el diseño indicado en la Figura 6, para el cual ξ coincide con el eje y , y η con el eje x . La aplicación de la ec. (5) da por resultado un ángulo de 6.7° para $V_{H\eta} = 235$ cm/s. **Calibración:** La calibración del equipo supone las siguientes etapas: 1.- *Calibración de los lanzadores:* tiene por objeto obtener la dependencia de la velocidad de ambos discos como función de la deformación del resorte respectivo. Se realizó para ambos lanzadores presentando pequeñas diferencias. Esta calibración reviste gran importancia porque, de acuerdo al diseño de la experiencia, permite asegurar el encuentro entre los discos. 2.- *Calibración de la cámara:* esta calibración permite obtener la equivalencia entre píxel y centímetro e incorporar la aberración de la cámara (Forsyth, Ponce, 2003, p.251). Como consecuencia de esta calibración se obtiene la equivalencia: píxel = 0,1308cm. **Captura de las imágenes:** La parte superior de ambos discos presenta, además del círculo que lo delimita y , que denominaremos círculo mayor un segundo círculo, círculo menor, con su centro ubicado a una distancia $b = 35$ mm del primero. El proceso de captura de imágenes se refiere al seguimiento de ambos círculos mientras dure la experiencia. Se realiza mediante una cámara Basler la cual asegura, en modo monocromático, 100 cuadros/segundo. Esta velocidad de captura nos permite observar y medir el desplazamiento de los centros de los discos



durante la interacción elástica para su posterior procesamiento. En la figura 10 se muestran tres imágenes de las cuales, la primera es previa al choque, la segunda en el instante de máxima deformación y, finalmente la tercera luego de la separación. En estas imágenes también es posible apreciar la rotación de los discos luego de la interacción.

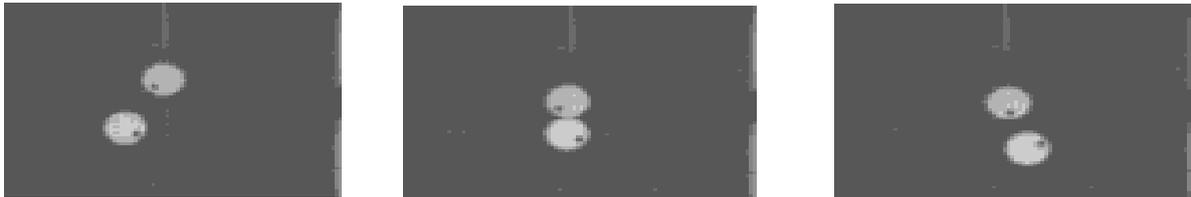


Figura 10: Instantáneas sucesivas del choque de discos. Observar la rotación del disco menor (negro) respecto del disco mayor (blanco).

Procesamiento de las imágenes: A partir de las imágenes obtenidas y, mediante las librerías disponibles de Open CV (Pajares, García, 2002, p.16-87) se logra determinar las sucesivas posiciones de los centros de los discos. De la posición relativa de los centros de los círculos mayores es posible, por derivaciones sucesivas obtener, primero, la velocidad relativa y, en segundo término, la fuerza de interacción entre ambos. Nos referimos a los valores relativos de la coordenada y o ξ para la cual se observa el comportamiento elástico de la colisión. Por otra parte, el desplazamiento del centro del círculo menor nos permite medir la rotación intrínseca de ambos centros al determinar el movimiento relativo respecto del círculo mayor. Los resultados del procesamiento de imágenes para la posición relativa en y de los círculos mayores se muestran en la figura 11a.

En la figura 11b y, mediante la gráfica de la función arco seno, se visualiza la dependencia temporal del ángulo barrido por el radio vector b que une los centros de los círculos mayor y menor de uno de los discos.

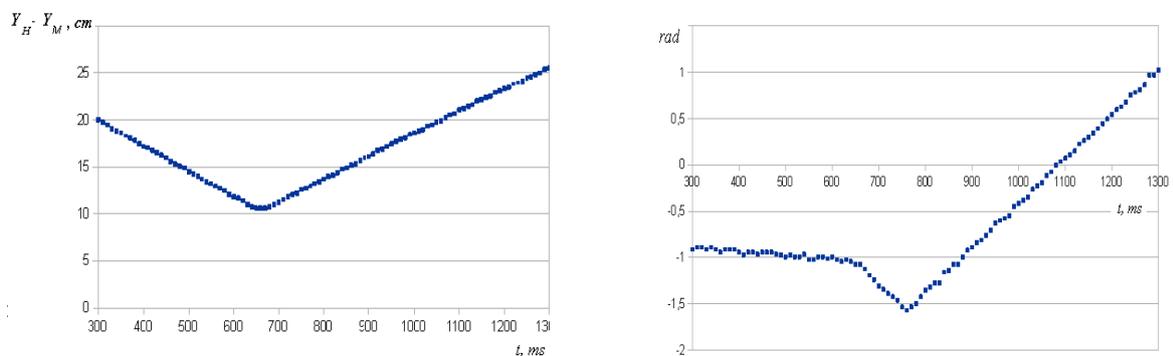


Figura 11: (a) Procesamiento de imágenes para el desplazamiento relativo de los discos en la dirección del eje y (choque elástico); (b) Procesamiento de imágenes para el desplazamiento angular de un disco.



La pendiente en la región lineal permite medir la velocidad angular del disco después de la interacción.

Análisis de los resultados obtenidos y conclusiones.

El tiro oblicuo: consideramos aceptables los resultados obtenidos para el tiro oblicuo los cuales presentan un error del orden del 9% en relación a los valores teóricos esperados, para determinadas condiciones iniciales. La parábola límite presenta un error como el citado para los puntos de contacto con las parábolas de distintos ángulos. Se advierte una tendencia, a obtener valores inferiores a los esperados y al respecto se están analizando las posibles causas.

El choque elástico de discos: Con los resultados previos aportados por el procesamiento de las imágenes se obtiene la velocidad y aceleración de los centros de los discos mayores. Con la primera se puede verificar la conservación del momento lineal y la segunda permite medir la fuerza de interacción. Así mismo y como resultado de analizar la dependencia temporal del ángulo barrido por el radio vector que une los centros de los círculos, se puede medir la velocidad angular de los discos después del choque. Con este resultado es factible comprobar la conservación del momento angular. La figura 11a evidencia, por la simetría respecto del mínimo, un choque aproximadamente elástico en la dirección del eje de choque con un coeficiente de restitución de, aproximadamente, 0.96 obtenido a partir de la ec. (7).

Del análisis numérico de los resultados obtenidos para el momento lineal, P , se infiere un acuerdo con los valores teóricos esperados con un error de hasta 13% dependiendo del eje. Las componentes de los momentos lineales según los ejes observan una disminución luego del choque y atribuible a la existencia de un par respecto de la base debido, posiblemente, al torque que la fuerza interactiva aplica a media altura del separador (figura 1b) el cual determina un roce con la pista y la consecuente pérdida de energía.

Para el análisis de la conservación del momento lineal se adopta la letra P y la siguiente convención para los índices: el primer subíndice indica la instancia de la colisión (antes o después); el segundo a la designación del disco (H ó M) y, el tercero al eje. Por otra parte, para el análisis de la conservación del momento angular se elige, por simplicidad, como centro de momento el punto sobre el eje ξ , de coordenada $(0, -R_M)$. Los subíndices se refieren al disco M o H; a la instancia de la colisión y al eje (z). La notación mayúscula, L , al momento del momento lineal, P , de cada disco y, la minúscula l al giro propio del disco (figura 12).

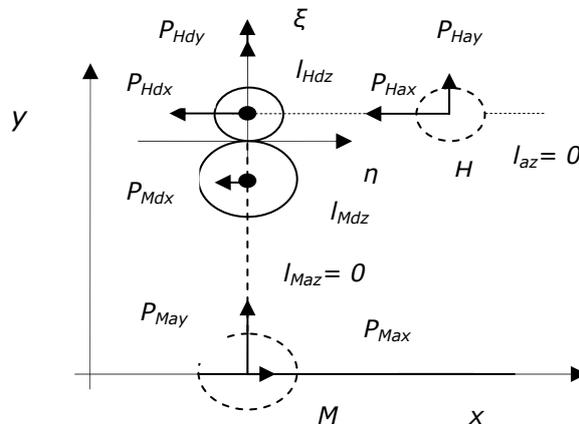


Figura 12: análisis de la conservación del momento lineal y angular. El momento angular intrínseco se indica con un círculo lleno ubicado en el centro de los discos.

Los valores numéricos para el momento lineal resultan:

$P_{Hax} = -4229$; $P_{Hay} = 147$; $P_{Hdx} = -2717$; $P_{Hdy} = 2791$; $P_{Max} = 222$; $P_{May} = 2740$; $P_{Mdx} = -761$; $P_{Mdy} \approx 0$. donde, todos los valores están en g.cm/s.

Y, para el momento angular: $L_{Haz} = 51705$; $L_{Hdz} = 32212$; $I_{Haz} = 0$; $I_{Hdz} = 6601$; $L_{Maz} = 0$; $L_{Mdz} = 0$; $I_{Maz} = 0$; $I_{Mdz} = 9506$; y sus unidades están expresadas en g.cm²/s.

Intervalo de interacción: velocidad relativa y fuerza interactiva.

Para la obtención de la velocidad relativa y la fuerza actuante sobre cada disco y, en particular, sobre el disco H se procede a derivar numéricamente dos veces sucesivas la coordenada relativa, ξ . Para cada derivación es necesario efectuar un acondicionamiento de la función en cuestión mediante un filtro pasa-bajo. Finalmente, la fuerza se obtiene multiplicando la segunda derivada por la masa del disco en cuestión, disco H, de 0.094kg. Las curvas respectivas se muestran en las gráficas de la figura 13. En la primera se observa una velocidad relativa, antes del choque de, aproximadamente, -2.6 m/s mientras que, después del choque, ha aumentado a 2.5 m/s determinando un coeficiente de restitución de, aproximadamente, 0.96.

El resultado obtenido para el valor máximo de la fuerza y a partir de figura 13b resulta coherente, dentro de los errores experimentales, con la aplicación de la ecuación, $m V_r \omega$ para la fuerza interactiva (figura 7), con $\omega \approx 31,4$, $m = 0,095$ g. y, el intervalo de interacción, $\Delta t \approx 0.1$ seg.

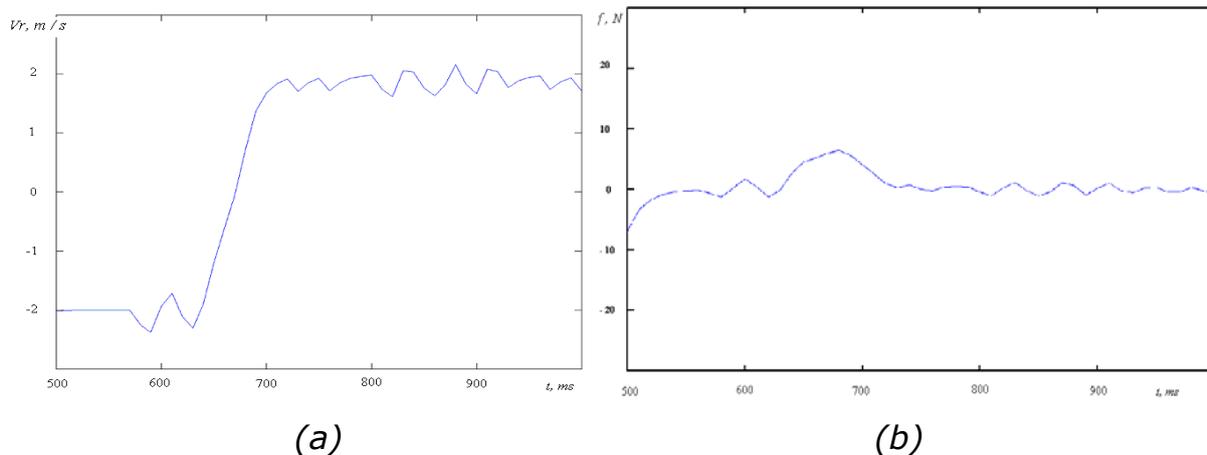


Figura 13: (a) Velocidad relativa y, (b) fuerza interactiva en la dirección del eje de choque, ξ .

Los resultados obtenidos están en un acierto con los esperados teóricamente dentro de un margen máximo de error de 13% dependiendo de la variable física analizada, así, para la conservación del momento angular se puede considerar un error de hasta 7%.

Consideramos como principal factor de error el momento respecto de la base de la fuerza interactiva radial que puede determinar un aumento de la fricción. Se espera mejorar el error disminuyendo la altura del eje separador pero que sea compatible con una constante elástica adecuada para realizar las mediciones en el intervalo interactivo con suficiente cantidad de puntos.

Según nuestro criterio, esta experiencia constituye un aporte para la enseñanza del tema abordado, especialmente en dos aspectos: por un lado la utilización del sistema de detección de posiciones para 2D, el cual puede aplicarse a otras experiencias de dinámica y, en lo referido al tema específico, por el análisis experimental del transitorio de la colisión.

BIBLIOGRAFÍA

- Beer, F. P. y Johnston, E. R. (1998). *Mecánica Vectorial para ingenieros (Dinámica)*, D.F., México: Mc. Graw Hill.
- Bradski, G. y Kaehler, A. (2005). *Learning Open CV*, Sebastopol, California, U. S.: O' reilly Media.
- Forsyth, D. y Ponce, J. (2003). *Computer vision: A modern approach*, Saddle River, N. J.: Prentice Hall.
- Leybold (2007) *Leybold didactic GMBH*, Hürth, Alemania: Leybold
- Pajares, G. P; y García J. (2002). *Visión por computador, imágenes digitales y aplicaciones*, D.F., México: Alfa omega Ra-Ma.
- Roederer, J. G. *Mecánica elemental* (2008), Buenos Aires, Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires (EUDEBA).